Capítulo 8

Momento de inércia

Paula Ferreira: psfer@pos.if.ufrj.br

8.1. Teorema dos eixos paralelos

Vamos calcular o momento de inércia de um corpo com eixo de rotação em z, sendo que o eixo do momento de inércia no CM está a uma distância d desse eixo.

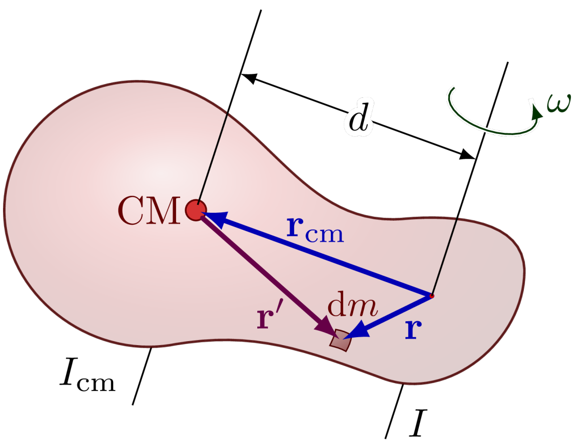


Figura 8.1

$$dI = \int \vec{r}^2 dm \tag{1}$$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{d} \tag{2}$$

$$r^2 = r'^2 + 2\vec{r}' \cdot \vec{d} + d^2 \tag{3}$$

Então,

$$I = \int r'^2 \mathrm{d}m + 2\vec{d} \cdot \int \vec{r}' \mathrm{d}m + d^2 \int \mathrm{d}m \tag{4}$$

$$I = I_{CM} + 2\vec{d} \cdot \int \vec{r}' \mathrm{d}m + d^2 M \tag{5}$$

r' é a posição relativa ao CM, então:

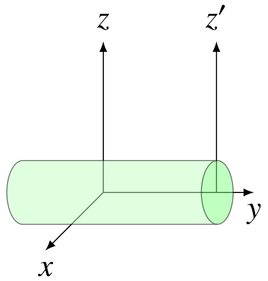
$$2\vec{d} \cdot \int \vec{r}' \mathrm{d}m = 0 \tag{6}$$

O momento de inércia de um corpo qualquer em relação a um eixo é a soma do momento de inércia em relação a um eixo paralelo, passando pelo CM, com o produto da massa M do corpo pelo quadrado da distância entre os dois eixos.

$$I = I_{CM} + Md^2 \tag{7}$$

8.1.1. Exemplo

Seja uma barra delgada de densidade homogênea, de comprimento L, girando numa extremidade. Calcule o momento de inércia no eixo Oz' que está a uma distância $L/2$ de Oz. Sabe-se que $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$.



Pelo teorema dos eixos paralelos:

$$I_{z'} = I_{CM} + Md^2 \tag{8}$$

$d = L/2$

$$I_{z'} = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} \tag{9}$$

$$I_{z'} = \frac{1}{3}ML^2 \tag{10}$$

8.2. Cálculo do momento de inércia

O momento de inércia tem papel análogo ao da massa inercial, ele representa a inércia de rotação.

Vamos calcular o momento de inércia de um corpo de densidade de massa homogênea. Dado um elemento de massa dm e a distância r ao eixo de rotação, temos:

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m \tag{11}$$

8.2.1. Anel circular delgado, em torno do centro

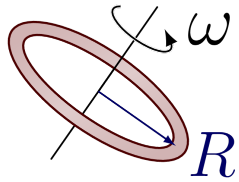


Figura 8.2

Anel de raio R:

$$I = R^2 \int \mathrm{d}m = MR^2 \tag{12}$$

8.2.2. Disco circular

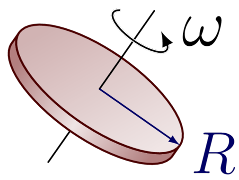


Figura 8.3

A distância dos elementos de massa ao eixo varia, temos um dr com $0 < r < R$. Temos um soma de anéis concêntricos:

$$\frac{\mathrm{d}m}{M} = \frac{2\pi r dr}{\pi R^2} = \frac{2}{R^2} r \mathrm{d}r \tag{13}$$

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \frac{2MR^4}{4R^2} \tag{14}$$

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \tag{15}$$

O resultado independe da espessura do disco, portanto, também é I de um cilindro.

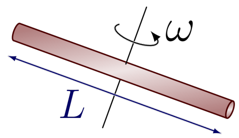


Figura 8.4

8.2.3. Barra delgada, em torno do centro

A barra de comprimento L gira em torno do centro $L/2$ e possui elemento de massa:

$$\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}r}{L}M \tag{16}$$

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = 2\int_0^{L/2} r^2 \frac{M}{L}\mathrm{d}r \tag{17}$$

$$I = \frac{2M}{3L}\left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{1}{12}ML^2 \tag{18}$$

8.2.4. Esfera, em torno de um diâmetro

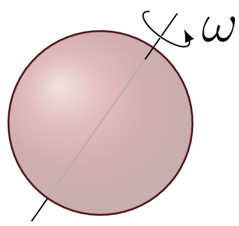


Figura 8.5

Vamos considerar a esfera como uma pilha de discos circulares.

$$\frac{\mathrm{d}m}{M} = \frac{\pi r^2 \mathrm{d}z}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4}\frac{r^2}{R^3}\mathrm{d}z \tag{19}$$

A relação entre r e z é:

$$r^2 = R^2 - z^2 \tag{20}$$

Então, para dois hemisférios com $0 < z < R$:

$$I = 2\int_0^R \mathrm{d}I \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

onde,

$$\mathrm{d}I = \frac{3M}{8R^2}r^4\mathrm{d}z \tag{23}$$

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \tag{24}$$

Referências

[1] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de fisica básica: Mecânica (vol. 1)*. Vol. 394. Editora Blucher, 2013.

[2] Hugh D Young, A Lewis Ford e Roger A Freedman. *Física I Mecânica.* 2008.