Capítulo
2

Cinemática 1D

Paula Ferreira: psfer@pos.if.ufrj.br

2.1. Aceleração

Aceleração é a taxa de variação da velocidade com o tempo cuja unidade é m/s^2.

Aceleração média:

$$a_{mx} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_{2x} - t_{1x}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Aceleração instantânea:

$$a_x = \lim_{\Delta \to 0} \frac{v_x(t_0 + \Delta t) - v_x(t_0)}{t - t_0} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{2}$$

Então, agora a inclinação da reta que corta a curva $v_x(t)$ em um dado tempo t representa a aceleração nesse instante.

Na figura 2.1, vemos a posição da partícula em vários intervalos de tempo que na verdade se trata da queda-livre que veremos depois. Vamos só olha para as figuras.

Olhando para posição e velocidade vemos que onde a inclinação é nula a velocidade é nula. A partir do meio da curva, a inclinação é positiva e portanto a velocidade é positiva.

Agora olhando apenas para a velocidade e aceleração: Como a velocidade cresce linearmente com o tempo (é uma reta), a aceleração é constante.

Na figura 2.2, temos uma trajetória nada intuitiva. Vamos supor que cada quadradinho vale 1. Da mesma forma, vamos analisar primeiro a posição e a velocidade. Em $t = 1$, a velocidade é negativa, pois a inclinação na curva azul nesse ponto é negativa. Em $t = 2$, a inclinação é quase nula, então a velocidade é quase zero, mas ainda negativa. Logo

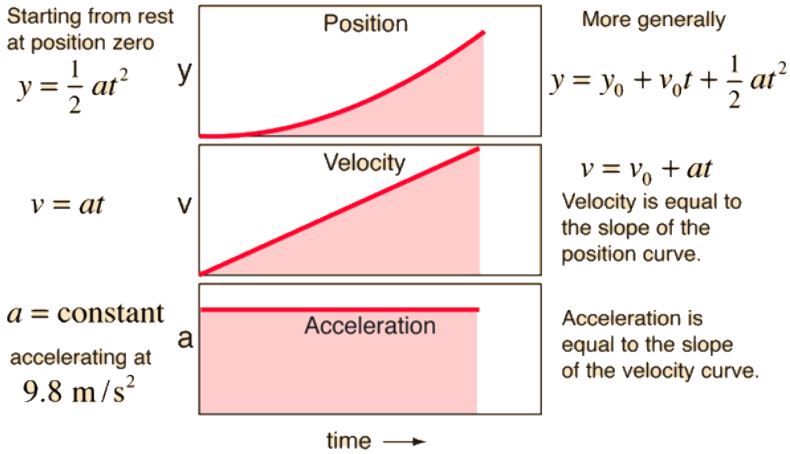

Figura 2.1: Posição, velocidade e aceleração.`http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hph.html`

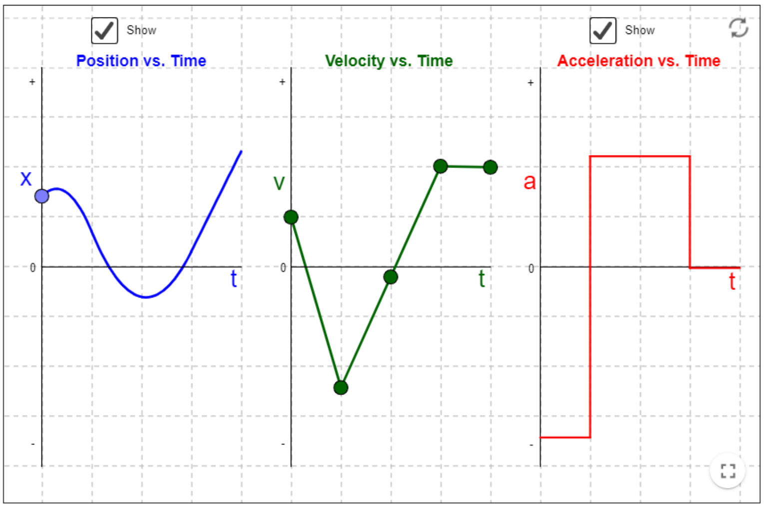

Figura 2.2: Posição, velocidade e aceleração.`https://www.geogebra.org/m/pdNj3DgD`

depois, a partícula volta para x+ e sobe com inclinação positiva constante. O gráfico da velocidade fica contante a partir de $t = 3$.

Olhando para a velocidade e aceleração, até $t = 1$, a velocidade tem inclinação negativa. Portanto, a aceleração é negativa. Entre $t = 1$ e $t = 3$, a inclinação da velocidade é positiva, vemos $a > 0$. Por fim, entre $t = 3$ e $t = 4$, a velocidade é constante, inclinação nula. Então, $a = 0$.

2.2. Interpretação geométrica da aceleração com a posição

Concavidade ou curvatura para baixo da função horária $x(t)$: $a < 0$.

Concavidade ou curvatura para cima da função horária $x(t)$: $a > 0$.

Veja pelas figuras acima e também as figuras em Young & Freedman e no Moysés onde fala de aceleração.

2.3. O problema inverso

Conhecendo a velocidade(figura 2.3) entre dois instantes t_1 e t_2, como calcular $x(t_1)$ e $x(t_2)$?

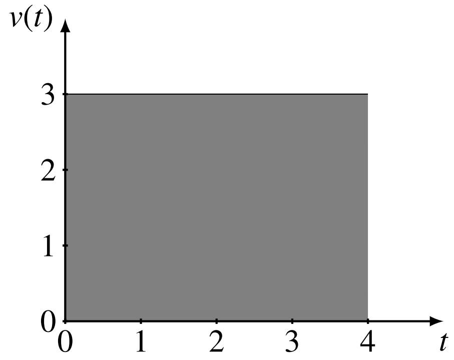

Figura 2.3

É possível ver que $v \cdot \Delta t = \Delta x$ indica $\frac{m}{\cancel{s}} \cdot \cancel{s}$. A área entre o gráfico e o eixo das abscissas (ou área embaixo da curva) dá o valor de Δx.

E quando $v(t)$ for uma função muito complicada como na figura 2.4?

$$v(t_1) \cdot \Delta t_1 + v(t_1') \cdot \Delta t_2 + ... = x(t_2) - x(t_1) \tag{3}$$

$$x(t_2) - x(t_1) \approx \sum_i v(t_i') \Delta t_i' \tag{4}$$

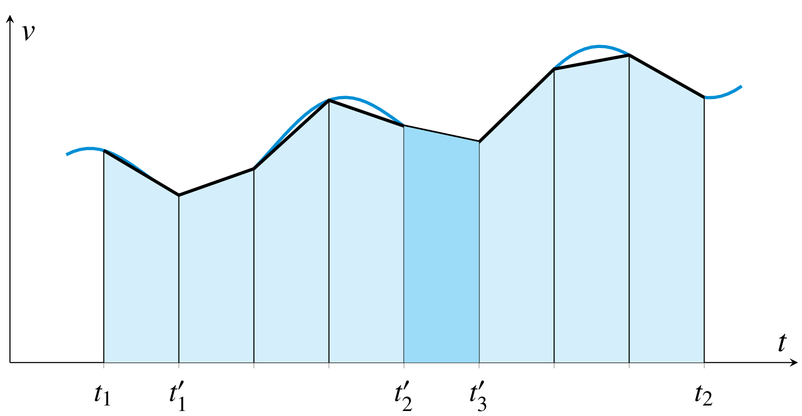

Figura 2.4

Então,

$$x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t'_i \to 0} \sum_i v(t'_i)\Delta t'_i$$

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i v(t'_i)\Delta t'_i := \int_{t_1}^{t_2} v(t')dt'$$

2.3.1. Integral de um polinômio

Dado $f(x) = x^n$, a integral de $f(x)$ é:

$$\int_{x_0}^{x_f} x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_{x_0}^{x_f} \tag{5}$$

2.4. MRUA

Agora podemos descrever o Movimento Retilíneo Uniformemente Acelerado, sabendo sua aceleração constante a:

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = a = cte. \tag{6}$$

Considerando os instantes $[t_0, t]$:

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a dt' = a(t - t_0) \tag{7}$$

$$\therefore v(t) = v_0 + a(t - t_0) \tag{8}$$

Onde $v(t_0) = v_0$ que é constante.

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')dt' \tag{9}$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} \{v_0 + at'\} dt' = \tag{10}$$

$$= \int_{t_0}^{t} v_0 dt' + \int_{t_0}^{t} at' dt' = \tag{11}$$

$$= v_0(t - t_0) + a\frac{(t - t_0)^2}{2} \tag{12}$$

Temos então a lei horária de MRUA:

$$x(t) = x(t_0) + v_0(t-t_0) + a\frac{(t-t_0)^2}{2} \tag{13}$$

Vamos escrever a velocidade em função da posição:

$$\frac{v(t)-v_0}{a} = t - t_0 \tag{14}$$

Colocando a equação 14 na 13, temos:

$$\begin{aligned}
x(t)-x(t_0) &= \left\{\frac{v(t)-v(t_0)}{a}\right\} + \frac{a}{2}\left\{\frac{v(t)-v_0}{a}\right\}^2 \\
a(x(t)-x(t_0)) &= 2v_0(v-v_0) + \frac{1}{2}(v(t)-v_0)^2 \\
2a(x-x_0) &= 2v_0(v-v_0) + v^2 - 2vv_0 + v_0^2 \\
2a(x-x_0) &= \cancel{2v_0v} - 2v_0^2 + v^2 - \cancel{2vv_0} + v_0^2 \\
2a(x-x_0) &= v^2 - v_0^2
\end{aligned}$$

$$\therefore v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0) \tag{15}$$

2.5. Queda livre

Movimento vertical com aceleração para baixo $\vec{g} = g(-\hat{j})$ cujo módulo é $g \simeq 9.8 m \cdot s^2$.

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \tag{16}$$

$$v^2(t) = v_0^2 - 2g(y-y_0) \tag{17}$$

$$v(t) = v_0 - gt \tag{18}$$

Referências

[1] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de fisica básica: Mecânica (vol. 1)*. Vol. 394. Editora Blucher, 2013.

[2] Hugh D Young, A Lewis Ford e Roger A Freedman. *Fısica I Mecânica*. 2008.