# Capítulo
# 3

# Cinemática 2D/ 3D

Paula Ferreira: psfer@pos.if.ufrj.br

## 3.1. Velocidade e aceleração vetoriais

Trajetória de uma partícula no sistema de referência $O_{xy}$ (figura 3.18 Moysés).

$$OP : \vec{r}(t)$$
$$OP' : \vec{r}(t+\Delta t)$$

$$PP' = \Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r} \tag{1}$$

A velocidade média entre os instantes $t$ e $t+\Delta t$ é:

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}}{\Delta t} \tag{2}$$

$$v_{x(t\to t+\Delta t)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{3}$$
$$v_{y(t\to t+\Delta t)} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \tag{4}$$

Da mesma forma que feito na cinemática em 1D, as velocidades instantâneas são:

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \frac{dx}{dt} \tag{5}$$

$$v_y(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) = \frac{dy}{dt} \tag{6}$$

$$\vec{v}(t) = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \tag{7}$$

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{8}$$

Para três dimensões temos a mesma coisa:

$$\vec{v}(t) = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}, \tag{9}$$

onde:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt},$$
$$v_y(t) = \frac{dy}{dt},$$
$$v_z(t) = \frac{dz}{dt}.$$

## 3.2. Vetor aceleração

Aceleração média (figura 3.6b Young & Freedman):

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{10}$$

Aceleração instantânea:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}y}\hat{j} \tag{11}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\hat{j} \tag{12}$$

**Partícula com velocidade constante e aceleração**: Em trajetória curva, mesmo com velocidade constante há aceleração. Uma variação de direção de velocidade também apresenta aceleração (figura 3.21 Moysés).

### 3.2.1. Componentes da aceleração

Figura 3.10 Young & Freedman.

- Aceleração paralela à velocidade da partícula: se move em linha reta.
- Aceleração ortogonal à velocidade da partícula: trajetória curva.

Exemplo: 3.4 Young & Freedman:

- ganha velocidade de A a C;
- velocidade máxima em E;
- depois de E, velocidade diminui.

### 3.3. Movimento Uniformemente Acelerado

$$|\vec{a}| = constante \tag{13}$$

$$\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \tag{14}$$

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \tag{15}$$

Adotando um sistema de coordenadas com $\vec{a}$ no eixo y:

$$\vec{a} = a\hat{j} \tag{16}$$

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} \tag{17}$$

$$\vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} \tag{18}$$

#### 3.3.1. Projeções do movimento sobre os eixos x e y

Eixo-x: $a_x = 0$

$v_x(t_0) = v_{0x}$: velocidade inicial em x.

$x(t_0) = x_0$: posicição inicial em x.

Eixo y:

$a_x = a = constante$

$v_y(t_0) = v_{0y}$: velocidade inicial em y.

$y(t_0) = y_0$: posição inicial em y.

$$v_y(t) = v_{0y} + a(t - t_0) \tag{19}$$

$$v_x(t) = v_{0x} \tag{20}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \tag{21}$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \tag{22}$$

De forma vetorial:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t)^2 \tag{23}$$

## Referências

[1] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de fisica básica: Mecânica (vol. 1)*. Vol. 394. Editora Blucher, 2013.

[2] Hugh D Young, A Lewis Ford e Roger A Freedman. *Fısica I Mecânica.* 2008.