

Capítulo 7

Colisões

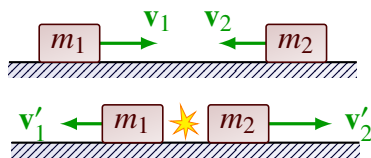
Paula Ferreira: psfer@pos.if.ufrj.br

7.1. Colisões elásticas e inelásticas

- Colisões elásticas: quando forças entre corpos forem conservativas, a energia cinética (K) total do sistema se conserva.

$$\Delta K = 0, \frac{dK}{dt} = 0$$

$$\Delta \vec{p} = 0, \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

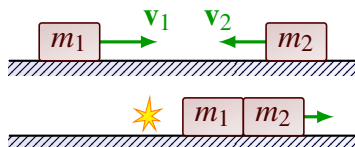


- Colisão inelástica: a energia cinética não se conserva.

Colisão perfeitamente inelástica: quando corpos ficam unidos após a colisão.

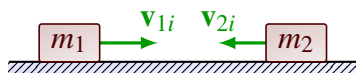
$$\Delta K \neq 0, \frac{dK}{dt} \neq 0$$

$$\Delta \vec{p} = 0, \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$



7.2. Colisões elásticas unidimensionais

Considere 2 partículas que se movem ao longo de uma reta e colidem elasticamente.



Apenas forças internas atuam na colisão, então:

$$\frac{dp_x}{dt} = 0 \quad (1)$$

$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f} \quad (2)$$

Como é uma colisão elástica:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \quad (3)$$

Vamos tentar reescrever L em termos de $p = mv$:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{p}{m} \right)^2 \quad (4)$$

$$K = \frac{p^2}{2m} \quad (5)$$

(5) \rightarrow (3)

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} + \frac{p_{2i}^2}{2m_2} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2} \quad (6)$$

Temos um sistema com (6) e (2). Reescrevendo (2):

$$p_{1i} - p_{1f} = p_{2f} - p_{2i} \quad (7)$$

e reescrevendo (6):

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} - \frac{p_{1f}^2}{2m_1} = \frac{p_{2f}^2}{2m_2} - \frac{p_{2i}^2}{2m_2} \quad (8)$$

$$p_{2f}^2 - p_{2i}^2 = \frac{m_2}{m_1} (p_{1f}^2 - p_{1i}^2) \quad (9)$$

$$p_{2f}^2 - p_{2i}^2 = \lambda (p_{1i}^2 - p_{1f}^2) \quad (10)$$

onde,

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1} \quad (11)$$

Dividindo (10) por (7):

$$p_{2f} + p_{2i} = \lambda(p_{1f} + p_{1i}) \quad (12)$$

$$m_2(v_{2f} + v_{2i}) = \lambda m_1(v_{1f} + v_{1i}) \quad (13)$$

$$m_2(v_{2f} + v_{2i}) = m_2(v_{1f} + v_{1i}) \quad (14)$$

$$v_{2f} + v_{2i} = v_{1f} + v_{1i} \quad (15)$$

$$(16)$$

A velocidade relativa entre as partículas se inverte:

$$v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i}) \quad (17)$$

$$p_{2f} + p_{2i} = \lambda(p_{1f} + p_{1i}) \quad (18)$$

$$p_{2f} - p_{2i} = p_{1i} - p_{1f} \quad (19)$$

(18) - (19):

$$2p_{2i} = (\lambda + 1)p_{1f} + (\lambda - 1)p_{1i} \quad (20)$$

$$2p_{2i} + (1 - \lambda)p_{1i} = (1 + \lambda)p_{1f} \quad (21)$$

$$p_{1f} = \frac{2p_{2i}}{1 + \lambda} + \left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \right) p_{1i} \quad (22)$$

(22) \rightarrow (19)

$$p_{2f} = p_{2i} + p_{1i} - \left\{ \frac{2p_{2i}}{1 + \lambda} + \left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \right) p_{1f} \right\} \quad (23)$$

$$p_{2f} = \frac{(1 + \lambda)p_{2i} - 2p_{2i}}{1 + \lambda} + \frac{(1 + \lambda) - (1 - \lambda)}{1 + \lambda} p_{1i} \quad (24)$$

$$p_{2f} = \frac{(\lambda - 1)}{(1 + \lambda)} p_{2i} + \frac{2\lambda}{1 + \lambda} p_{1i} \quad (25)$$

Reescrevendo (22) e (25) em termos de v_{1i} , v_{2i} , m_1 e m_2 :

$$m_1 v_{1f} = \frac{2m_2 v_{2i}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} + \left(\frac{1 - m_2/m_1}{1 + m_2/m_1} \right) \quad (26)$$

$$v_{1f} = \frac{2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} + \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \quad (27)$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} - \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad (28)$$

7.2.1. Casos particulares

(a) Massas iguais:

$$p_{1f} = \frac{2p_{2i}}{1+1} + 0p_{1i} \Rightarrow p_{1f} = p_{2i} \quad (29)$$

$$v_{1f} = v_{2i} \quad (30)$$

$$p_{2f} = p_{1i} \Rightarrow v_{2f} = v_{1i} \quad (31)$$

As partículas trocam momento e velocidade.

(b) Alvo em repouso:

$$v_{2i} = 0 = p_{2i} \quad (32)$$

$$p_{2f} = \left(\frac{2\lambda}{\lambda+1} \right) p_{1i} \quad (33)$$

$$p_{1f} = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right) p_{1i} \quad (34)$$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (35)$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} \quad (36)$$

Se $m_1 \ll m_2$: $v_{2f} \ll v_{1i}$:

$$v_{1f} = -v_{1i} \quad (37)$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_2} v_{1i} \ll v_{1i} \quad (38)$$

quase não mexe.

(b) $m_1 \ll m_2$

$$v \simeq v_{1i} \quad (39)$$

$$v_{2f} \simeq 2v_{1i} \quad (40)$$

A partícula massiva quase não muda sua velocidade, enquanto a menor é arrastada com o dobro da velocidade.

7.3. Colisões unidimensionais totalmente inelásticas

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \quad (41)$$

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = v_{CM} \quad (42)$$

- CM se move com MRU
- partículas se movem juntas com v_{CM}

Exemplo: Pêndulo Balístico Bala de massa m_1 colide com tronco de massa m_2 , pendurado por fios ao teto. A colisão é totalmente inelástica e após a colisão o sistema alcança uma altura h acima da posição mais baixa do pêndulo. Qual a velocidade inicial da bala?

Por conservação de momento linear

$$m_1 v_{1i} + 0 = (m_1 + m_2) v_f \quad (43)$$

Após eles colidirem, podemos aplicar a conservação de energia do sistema até atingir a altura h .

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad (44)$$

$$(m_1 + m_2) \frac{v_f^2}{2} = (m_1 + m_2) gh \quad (45)$$

$$v_f = \sqrt{2gh} \quad (46)$$

(44) \rightarrow (43):

$$v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh} \quad (47)$$

Referências

- [1] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de física básica: Mecânica (vol. 1)*. Vol. 394. Editora Blucher, 2013.
- [2] Hugh D Young, A Lewis Ford e Roger A Freedman. *Física I Mecânica*. 2008.