Capítulo
7

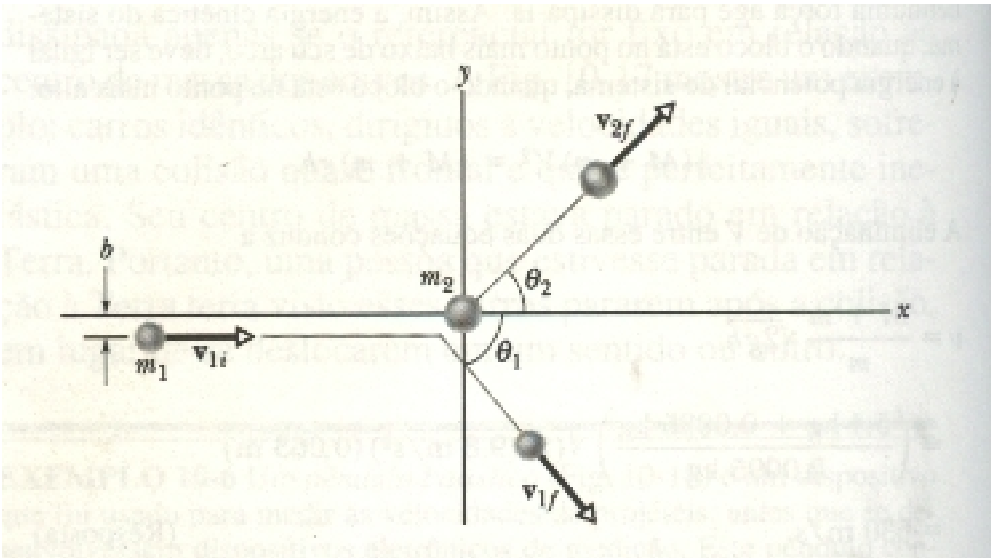
Colisões

Paula Ferreira: psfer@pos.if.ufrj.br

7.1. Colisões em 2D

Duas partículas de massa m_1 e m_2 colidem elasticamente. A massa m_2 está inicialmente em repouso.

$$\vec{P}_i = m_1\vec{v}_{1i} = \vec{p}_{1i} \tag{1}$$



Uma colisão elástica entre dois corpos onde a colisão não é frontal. O corpo com massa m_2 (o alvo) está inicialmente em repouso. A distância b é o parâmetro de impacto.

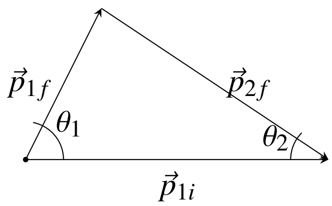
Figura 7.1

$$\vec{P}_f = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} \tag{2}$$

b é o parâmetro de choque. Se b=0, a colisão é frontal, que equivale a uma colisão 1D. Se $b > r_1 + r_2$, não há colisão.

Por conservação de momento,

$$\vec{p}_{1i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \tag{3}$$



$$p_{1i}\hat{\mathbf{i}} = p_{1f}(\cos\theta_1\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta_1\hat{\mathbf{j}}) + p_{2f}(\cos\theta_2\hat{\mathbf{i}} - \sin\theta_2\hat{\mathbf{j}}) \tag{4}$$

Por se tratar de uma colisão elástica:

$$K_i = K_f \tag{5}$$

$$\frac{\vec{p}_{1i}^2}{2m_1} = \frac{\vec{p}_{1f}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{2f}^2}{2m_2} \tag{6}$$

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2} \tag{7}$$

(7) e (4) formam um sistema de 4 incógnitas (p_{1f},p_{2f}, θ_1 e θ_2) com 3 equações. Precisamos de informação para resolver o sistema.

7.1.1. Massas iguais

$$m_1 = m_2 = m$$

(7):

$$p_{1i}^2 = p_{1f}^2 + {p_{2f}}^2 \tag{8}$$

Também obtemos pela lei dos cossenos:

$$p_{1i}^2 = p_{1f}^2 + p_{2f}^2 + 2\vec{p}_{1f}\cdot\vec{p}_{2f} \tag{9}$$

Pela (8),$vecp_{1f} \cdot \vec{p}_{2f} = 0$, os vetores são perpendiculares. Então $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$. As direções de movimento de partículas de mesma massa após uma colisão elástica são perpendiculares.

Como o momento se conserva, o CM se move com MRU. O referencial do CM é inercial, o referencial que vemos a colisão é o referencial do laboratório. Vamos chamar o referencial do CM de referencial (') linha e tentar mostrar o mesmo que a conclusão do parágrafo anterior.

Com relação ao CM:

$$\vec{p}'_{1i} + \vec{p}'_{2i} = \vec{p}'_{1f} + \vec{p}'_{2f} = 0 \tag{10}$$

O CM vê as partículas se aproximando inicialmente e se afastando após a colisão:

$$\vec{p}'_{1i} = -\vec{p}'_{2i} \tag{11}$$
$$\vec{p}'_{1f} = -\vec{p}'_{2f} \tag{12}$$

Então, $\theta'_1 + \theta'_2 = \pi$.

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{v}_{1i}}{2} = \frac{v_1}{2}\hat{\mathbf{i}} \tag{13}$$

As velocidades relativas $\vec{v}'$ ao CM são:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{CM} = \vec{v} - \frac{\vec{v}_1}{2} \tag{14}$$

onde $\vec{v}$ corresponde à velocidade no referencial do laboratório.

$$|\vec{v}'_{1f}| = |\vec{v}'_{2f}| = v_1/2 \tag{15}$$

O triângulo formado por $\vec{v}_{1f}$, $\vec{v}_{CM}$ e $\vec{v}'_{1f}$ é isóceles.

Então, $\theta_1 = \theta'_1/2$, $\theta_2 = \theta'_2/2$, o que recupera $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$. Temos um triângulo retângulo no referencial do lab.

$$p_{1f} = p_{1i}\cos\theta_1 \tag{16}$$
$$p_{2f} = p_{1i}\sin\theta_1 \tag{17}$$

7.1.2. Caso geral

$$p_{2f}^2 = \lambda(p_{1i}^2 - p_{2f}^2) \tag{18}$$
$$\vec{p}_{2f}^2 = (\vec{p}_{1i}^2 - \vec{p}_{1f}^2) = p_{1i}^2 + p_{1f}^2 - 2p_{1i}^2 p_{1f}^2 \cos\theta_1 \tag{19}$$

$$\lambda(p_{1i}^2 - p_{2f}^2) = p_{1i}^2 + p_{1f}^2 - 2p_{1i}^2 p_{1f}^2 \cos\theta_1 \tag{20}$$
$$(1+\lambda)p_{1f}^2 - 2p_{1i}p_{1f}\cos\theta_1 + (1-\lambda)p_{1i}^2\cos\theta_1 = 0 \tag{21}$$

Resolvendo a equação de segundo grau:

$$p_{1f} = p_{1i}\left[\frac{\cos\theta_1 \pm \sqrt{\cos^2\theta_1 - (1-\lambda^2)}}{(1+\lambda)}\right] \tag{22}$$

Como m_1 sobe, só aceitamos $p_{1f} \geq 0$.

(i) $m_2 > m_1$, $\lambda > 1$

$$-(1-\lambda^2) > 0$$
$$\cos^2\theta_1 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} > 0$$

Como $\sqrt{\Delta} > \cos^2\theta_1$, então só aceitamos a solução com +. Além disso, $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ com $\lambda > 0$.

(ii) $m_2 > m_1$, $\lambda < 1$

$$\lambda^2 \geq \sin^2\theta_1 \tag{23}$$
$$\sin^2\theta_1 \leq \sin\theta_{max} = \lambda = \frac{m_2}{m_1} < 1 \tag{24}$$

$\lambda \ll 1$, $\theta_{max} \ll 1$, uma partícula de massa grande que colide com uma muito leve em repouso, quase não sofre deflexão.

Como $(1-^2) < 1$, $\sqrt{\Delta} < \cos^2\theta_1$, ambas as raízes são aceitáveis.

(iii) $m_1 = m_1$, $\lambda = 1$, $\sqrt{\Delta} = 0$. $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$

Referências

[1] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de fisica básica: Mecânica (vol. 1)*. Vol. 394. Editora Blucher, 2013.

[2] Hugh D Young, A Lewis Ford e Roger A Freedman. *Física I Mecânica.* 2008.