Capítulo
8

Dinâmica no movimento de rotação

Paula Ferreira: psfer@pos.if.ufrj.br

8.1. Exemplo 9.9 Y & F

Cabo desenrolando de um cilindro maciço de massa M e raio R Um objeto de massa m é libertado do repouso de uma altura h do solo. Qual a velocidade angular e tangencial que o objeto chega no solo?

$$K_i + U_i = K_f + U_f \tag{1}$$
$$U_i = K_f \tag{2}$$

$$K_f = K_m + K_M = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \tag{3}$$
$$U_i = mgh \tag{4}$$

$$v = \omega R \tag{5}$$

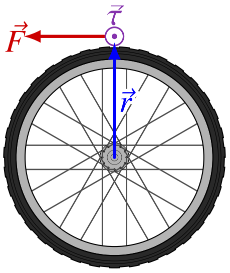
$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{(MR^2/2)\omega^2}{2} \tag{6}$$
$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}} \tag{7}$$

8.2. Torque

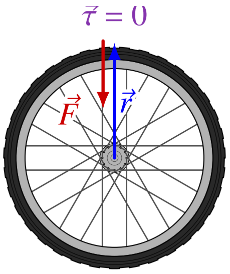
Movimento de translação: movimento do corpo como um todo pelo espaço.

O torque fornece a medida de como uma ação de uma força pode provocar ou alterar o movimento de rotação de um corpo.

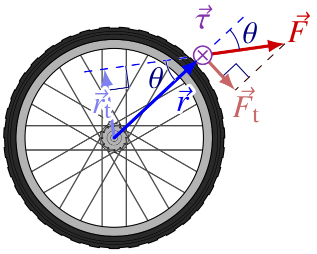
A força $\vec{F}$ aplica um torque em torno no centro da roda da bicicleta que tem sentido $\odot$ (para fora da página).



A força $\vec{F}$ não aplica torque nenhum na roda.



A componente $\vec{F}_t$ aplica um torque à roda que tem sentido para dentro da página $\otimes$.



O torque também depende da linha de ação da da força, a distância na direção que a força age sobre o corpo. O braço da alavanca é a distância entre o eixo de rotação e o ponto de aplicação da força, nos exemplos acima o braço é o raio da roda.

O módulo do torque é descrito por

$$\tau = \text{força aplicada} \times \text{braço da alavanca} \tag{8}$$

o torque é maior quanto maior for o braço da alavanca.

O sinal de τ vai depender da escolha do sentido de rotação. Vamos usar a convenção de $\tau > 0, \odot$ para rotação anti-horária e $\tau < 0, \otimes$ para rotação horária.

$[\tau] : N \cdot m$

8.3. Torque como um vetor

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{9}$$

$$\tau = rF \sin\theta \tag{10}$$

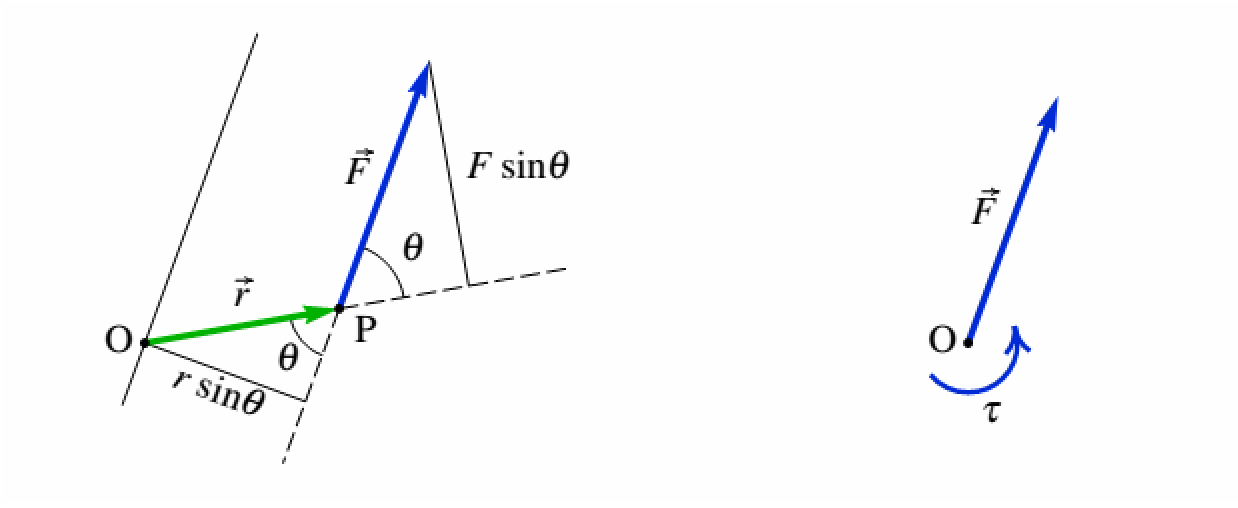


Figura 8.1

8.4. Torque e aceleração angular

Considere a força resultante $\vec{F}_1$ que pode ser dividida em componente tangencial e radial:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1,tang} + \vec{F}_{1,rad} \tag{11}$$

Pela segunda lei de Newton:

$$F_{1,tang} = m_1 a_{1,tang} \tag{12}$$

A componente tangencial da aceleração é:

$$a_{1,tang} = r_1 \alpha_z \tag{13}$$

então,

$$F_{1,tang} = m_1 r_1 \alpha_z \tag{14}$$
$$F_{1,tang} r_1 = m_1 r_1^2 \alpha_z \tag{15}$$
$$\tau_{1z} = m_1 r_1^2 \alpha_z \tag{16}$$

Sabemos que a grandeza com r_1^2 é o momento de inércia da partícula. Assim,

$$\tau_{1z} = I_1 \alpha_z \tag{17}$$

Para muitas partículas, somamos as contribuições de todas as partículas

$$\tau_{1z} + \tau_{2z} + ... = I_1 \alpha_z + I_2 \alpha_z + ... \tag{18}$$
$$\sum \tau_z = \left(\sum m_i r_i^2\right) \alpha_z \tag{19}$$

Então, obtemos a segunda lei de Newton para o movimento de rotação que só vale para corpos rígidos:

$$\sum \tau_z = I\alpha_z \tag{20}$$

no caso geral

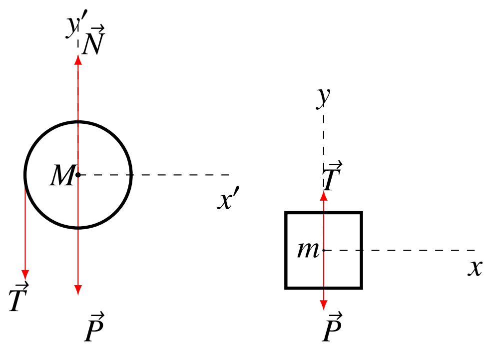
$$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha} \tag{21}$$

Da mesma forma, a soma dos torques internos é zero e só os torques de forças externas aceleram o corpo rígido.

8.4.1. Exemplo 10.3

Diagramas de corpo livre:

Diagrama do cilindro M e do bloco m:



Pela segunda lei de Newton

Movimento de translação:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{22}$$

$$T\hat{\mathbf{j}}' - mg\hat{\mathbf{j}}' = ma(-\hat{\mathbf{j}}') \tag{23}$$

$$mg - T = ma \tag{24}$$

Movimento de rotação:

$$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha} \tag{25}$$

$$\sum \vec{\tau} = R(-\hat{\mathbf{i}}') \times T(-\hat{\mathbf{j}}') + 0\hat{\mathbf{i}} \times \{-Mg\hat{\mathbf{j}}' + N\hat{\mathbf{j}}'\} = RT\hat{\mathbf{k}} \tag{26}$$

$$\tau = RT = I\alpha_z = \frac{1}{2}MR^2\alpha_z \tag{27}$$

$$T = \frac{1}{2}MR\alpha_z \tag{28}$$

O módulo aceleração para desenrolar o cabo é a mesma que da aceleração tangencial do cilindro que é a aceleração de decida do bloco.

$$a = \alpha_z R \tag{29}$$

(28), (29) → (24):

$$mg - \frac{1}{2}Ma = ma \tag{30}$$
$$a = \frac{g}{1 + M/2m} \tag{31}$$
$$\vec{a} = -\frac{g}{1 + M/2m}\hat{\mathbf{j}} \tag{32}$$

8.5. Movimento combinado de rotação e translação

Movimento de translação do centro de massa e de uma rotação em torno de um eixo que passa pelo centro de massa.

Considere um corpo rígido constituído por partículas. A velocidade de cada partícula é:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i' \tag{33}$$

onde $\vec{v}_i'$ é a velocidade da partícula em relação ao CM. A energia cinética de cada partícula é:

$$K_i = \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i') \tag{34}$$
$$= \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM} + 2\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i' + \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_i') \tag{35}$$
$$K_i = \frac{1}{2}m_i(v_{CM}^2 + 2\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i' + v_i'^2) \tag{36}$$
$$K = \sum K_i = \sum\left(\frac{1}{2}m_i v_{CM}^2\right) + \sum(m_i\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i') + \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2 \tag{37}$$
$$K = \frac{1}{2}(\sum m_i)v_{CM}^2 + \vec{v}_{CM} \cdot (\sum m_i\vec{v}_i') + \frac{1}{2}\sum(m_i v_i'^2) \tag{38}$$

$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \tag{39}$$

8.5.1. Rolamento sem deslizamento

O ponto em contato com superfície deve permanecer instantaneamente em repouso para não deslizar.

A condição para rolamento sem deslizamento é:

$$v_{CM} = R\omega \tag{40}$$

$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \tag{41}$$

$$U = Mgy_{CM} \tag{42}$$

Exemplo: Ioiô

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \tag{43}$$
$$U_1 = K_2 \tag{44}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 \tag{45}$$
$$K_2 = \frac{3}{4}Mv_{CM}^2 \tag{46}$$

$$Mgh = \frac{3}{4}Mv_{CM}^2 \tag{47}$$
$$v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \tag{48}$$

Exemplo 10.5 Y& F. Veja o vídeo `https://youtu.be/lvfzdibrUFA`

Referências

[1] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de fisica básica: Mecânica (vol. 1)*. Vol. 394. Editora Blucher, 2013.

[2] Hugh D Young, A Lewis Ford e Roger A Freedman. *Física I Mecânica.* 2008.