Capítulo 8

Dinâmica no movimento de rotação

Paula Ferreira: psfer@pos.if.ufrj.br

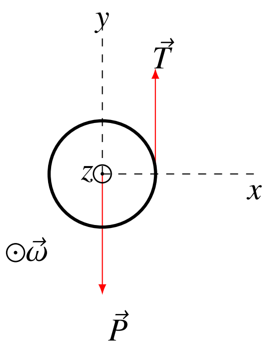
8.1. Movimento combinado de rotação e translação

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM} \tag{1}$$
$$\sum \vec{\tau} = I_{CM}\vec{\alpha} \tag{2}$$

A eq. (2) vale mesmo quando o eixo de rotação se move contanto que:

- O eixo que passa pelo CM deve ser um eixo de simetria
- O eixo não pode mudar de direção

8.1.1. Exemplo Ioiô 10.6



Movimento de Translação:

$$\sum \vec{F} = M\vec{a}_{CM} \tag{3}$$
$$(T - Mg)\hat{\mathbf{j}} = -Ma\hat{\mathbf{j}} \tag{4}$$
$$T = M(g-a) \tag{5}$$

Movimento de rotação:

$$\sum \vec{\tau} = I_{CM}\vec{\alpha} \tag{6}$$
$$\vec{\tau}_P + \vec{\tau}_T = I_{CM}\alpha\hat{\mathbf{k}} \tag{7}$$
$$0 \times (-Mg\hat{\mathbf{j}}) + R\hat{\mathbf{i}} \times T\hat{\mathbf{j}} = I_{CM}\alpha\hat{\mathbf{k}} \tag{8}$$
$$RT = I_{CM}\alpha \tag{9}$$
$$RT = \frac{MR^2}{2}\alpha \tag{10}$$
$$T = \frac{MR}{2}\alpha \tag{11}$$

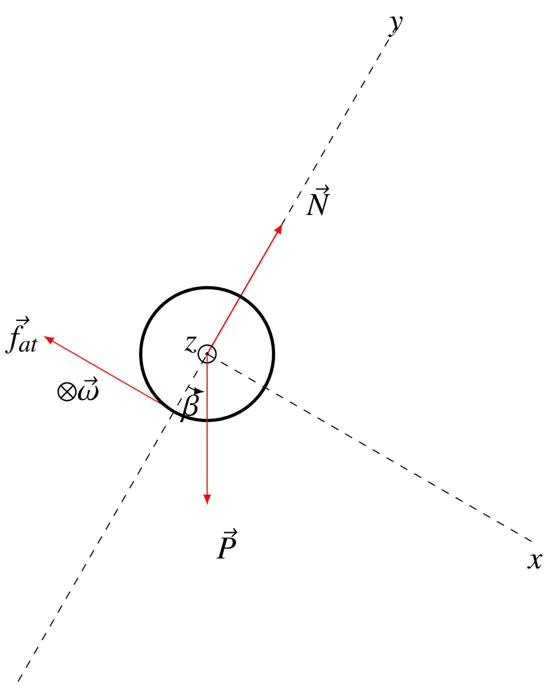
O fio desenrola sem deslizar, então:

$$a_{CMy} = \alpha R \tag{12}$$

$$\vec{a}_{CM} = -\frac{2}{3}g\hat{\mathbf{j}} \tag{13}$$
$$\vec{T} = \frac{1}{3}Mg\hat{\mathbf{j}} \tag{14}$$

8.1.2. Exemplo 10.7

Bola maciça rolando sem deslizar num plano inclinado de ângulo β.



Movimento de translação:

$$\sum \vec{F} = M\vec{a}_{CM} \tag{15}$$

$$N\hat{\mathbf{j}} + Mg(\sin\beta\hat{\mathbf{i}} - \cos\beta\hat{\mathbf{j}}) - f_e\hat{\mathbf{i}} = Ma_{CM}\hat{\mathbf{i}} \tag{16}$$

$$N - Mg\cos\beta = 0 \tag{17}$$

$$Mg\sin\beta - f_e = Ma_{CM} \tag{18}$$

Movimento de rotação:

$$\sum \vec{\tau} = I_{CM}\vec{\alpha} \tag{19}$$

$$\vec{0} \times \vec{N} + 0 \times \vec{P} - R\hat{\mathbf{j}} \times (-f_e\hat{\mathbf{i}}) = I_{CM}\alpha(-\hat{\mathbf{k}}) \tag{20}$$

$$Rf_e = I_{CM}\alpha \tag{21}$$

$$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2 \tag{22}$$

$$a_{CM} = \alpha R \tag{23}$$

$$f_e R = \frac{2}{5}MRa_{CM} \tag{24}$$

$$f_e = \frac{2}{5}Ma_{CM} \tag{25}$$

(25) → (18)

$$a_{CM} = \frac{5}{7}g\sin\beta \tag{26}$$

$$f_e = \frac{2}{7}Mg\sin\beta = \mu_e N \tag{27}$$

(17) → (27)

$$\mu_e = \frac{2}{7}\tan\beta \tag{28}$$

8.2. Atrito de rolamento

Quando a linha de ação da força normal passa pelo centro do eixo de rotação, não há deslizamento. Sem deslizamento, a força de atrito não realiza trabalho.

8.3. Trabalho e potência no movimento de rotação

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{29}$$
$$\mathrm{d}W = F_{tg}\mathrm{d}s \tag{30}$$
$$\mathrm{d}W = F_{tg}R\mathrm{d}\theta \tag{31}$$
$$\mathrm{d}W = \tau\mathrm{d}\theta \tag{32}$$

O trabalho total realizado pelo torque durante um deslocamento angular θ_1 a θ_2:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\mathrm{d}\theta \tag{33}$$

Para torque constante

$$W = \tau(\theta_2 - \theta_1) \tag{34}$$

8.3.1. Teorema trabalho-energia

$$\mathrm{d}W = \tau\mathrm{d}\theta = I\alpha\mathrm{d}\theta \tag{35}$$
$$\mathrm{d}W = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta = I\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\omega = I\omega\mathrm{d}\omega \tag{36}$$

$$W = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega\mathrm{d}\omega = \frac{I}{2}\omega_2^2 - \frac{I}{2}\omega_1^2 \tag{37}$$

8.3.2. Potência

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \tau\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{38}$$
$$P = \tau\omega \tag{39}$$

Referências

[1] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de fisica básica: Mecânica (vol. 1)*. Vol. 394. Editora Blucher, 2013.

[2] Hugh D Young, A Lewis Ford e Roger A Freedman. *Física I Mecânica.* 2008.