Capítulo 9

Momento angular

Paula Ferreira: psfer@pos.if.ufrj.br

9.1. Momento angular

A segunda lei de Newton é:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

O torque é escrito em termos dessa força resultante

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

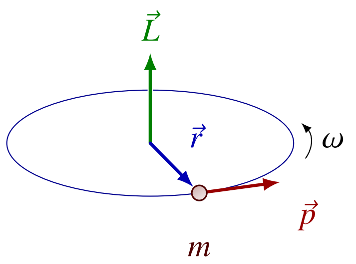
$$\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{r}\times\vec{p})}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p} = \frac{\mathrm{d}(\vec{r}\times\vec{p})}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

Então,

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

onde, $\vec{L}$ é o momento angular

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v} \tag{5}$$



$\vec{L}$ é perpendicular a $\vec{r}$ e a $\vec{p}$.

9.1.1. Momento angular de um corpo rígido

Um corpo constituído de i partículas possui momento angular total que a é a soma do momento angular das i partículas:

$$L = \sum_i L_i \tag{6}$$

$$L_i = m_i(r_i\omega_i)r_i = m_i r_i^2 \omega \tag{7}$$

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \omega = I\omega \tag{8}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \tag{9}$$

Exemplo: Considere um bambolê, de massa m e raio R, colado a um quadrado feito de 4 barras de massa m e largura R.A estrutura rígida gira em torno do eixo onde eles estão colados com período de rotação T. Calcule o momento angular em torno desse eixo. $I_{anel} = MR^2$, $I_{barra} = \frac{MR^2}{12}$.

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \tag{10}$$
$$L = I\omega \tag{11}$$

$$I = I_{quadrado} + I_{bambole} \tag{12}$$

Pelo teorema dos eixos paralelos:

$$I_{bambole} = mR^2 + mR^2 = 2mR^2 \tag{13}$$

$$I_{quadrado} = I_1 + I_2 + I_4 + I_3 \tag{14}$$
$$I_1 = 0 \tag{15}$$
$$I_2 = \frac{mR^2}{12} + \frac{mR^2}{4} \tag{16}$$
$$I_3 = 0 + mR^2 \tag{17}$$
$$I_4 = I_2 \tag{18}$$
$$I_{quadrado} = \frac{5mR^2}{3} \tag{19}$$

$$I = \frac{11mR^2}{3} \tag{20}$$

Assim,

$$L = \omega I \tag{21}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{22}$$

$$L = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{11mR^2}{3} \tag{23}$$

9.1.2. Momento angular de um sistema de partículas

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \tag{24}$$

A posição do centro de massa do sistema é

$$\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i / M \tag{25}$$

$$M = \sum_i m_i \tag{26}$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{R} \tag{27}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{V} \tag{28}$$

$$\vec{P} = M\vec{V} \tag{29}$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i (\vec{r}'_i + \vec{R}) \times (\vec{v}_i + V) \tag{30}$$

$$= \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i + \cancel{\vec{R} \times \left(\sum_i m_i \vec{v}'_i \right)} + \cancel{\left(\sum_i m_i \vec{r}'_i \right)} \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{R} \times \vec{V} \tag{31}$$

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{R} \times \vec{P} \tag{32}$$

Onde $\vec{L}'$ é o momento angular do sistema em relação ao centro de massa. Diferente do momento linear que $\vec{p}'$ se anula, o momento angular $\vec{L}'$ do movimento interno do sistema em geral não se anula. Podemos chamar $\vec{L}'$ de momento angular interno ou spin.

Referências

[1] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de fisica básica: Mecânica (vol. 1)*. Vol. 394. Editora Blucher, 2013.

[2] Hugh D Young, A Lewis Ford e Roger A Freedman. *Física I Mecânica*. 2008.