Capítulo 6

Impulso e momento linear

Paula Ferreira: psfer@pos.if.ufrj.br

6.1. Exemplo de conservação de momento

Um astronauta, em gravidade nula, está em repouso segurando uma ferramenta com massa um quarto da sua massa. Para se mover e chegar à ISS, ele arremessa a ferramenta para frente com velocidade v_f. Qual a velocidade do astronauta após o arremesso?

Na ausência de forças externas, o momento linear se conserva:

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{1}$$

$$p_{0a} + p_{0f} = p_a + p_f \tag{2}$$

$$0 + 0 = mv + \frac{m}{4} v_f \tag{3}$$

Portanto,

$$\vec{v} = -\frac{v_f}{4}\hat{\mathbf{i}} \tag{4}$$

o astronauta se move no sentido contrário ao da ferramenta.

Assista aos seguintes vídeos mostrando a situação em microgravidade:

- `https://www.youtube.com/watch?v=4IYDb6K5UF8&list=LL&index=3`
- `https://www.youtube.com/watch?v=gH5C6fJrKd0`[1]

6.2. Centro de massa

Voltando ao caso de duas partículas de mesma massa.

[1]Não reproduzam as palavras do Jovem Nerd, empuxo não é a nomenclatura adequada!

$$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1 = m\frac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

$$\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = m\frac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

O momento linear total é:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m\frac{\mathrm{d}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

O movimento do sistema como um todo, pode ser escrito como:

$$M\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}^{ext} \tag{8}$$

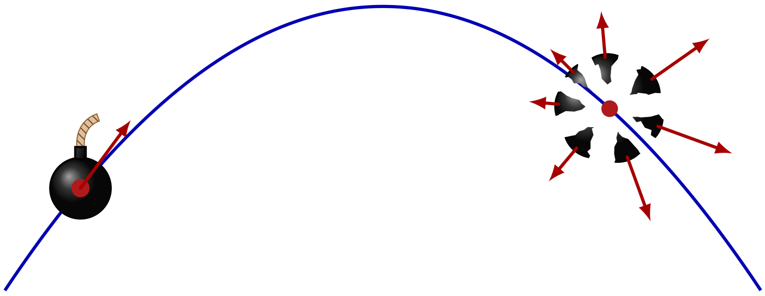
$$\Rightarrow \vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \tag{9}$$

com

$$M = 2m \tag{10}$$

O sistema de partículas se move conforme o centro de massa(CM) como uma massa única M.

O movimento interno de $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ em relação ao centro de massa não altera em nada o movimento total do sistema. O centro de massa se move sob a ação unicamente da força externa total. Isso é bem representado por uma bomba lançada com movimento de projétil, seu centro de massa descreve o movimento parabólico, enquanto que cada fragmento é espalhado com respeito ao CM.



6.2.1. Massas diferentes

Agora, considere um sistema de partículas com massas diferentes m_1 e m_2.

$$\vec{P} = m_1\frac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{\mathrm{d}t} \tag{11}$$

$$= M\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

onde $M = m_1 + m_2$. Então,

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = X\hat{\mathbf{i}} + Y\hat{\mathbf{j}} + Z\hat{\mathbf{k}} \tag{13}$$

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \tag{14}$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \tag{15}$$

$$Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} \tag{16}$$

O movimento das partículas relativo ao CM é:

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_1 - m_1\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{17}$$

$$\vec{r}_2' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{18}$$

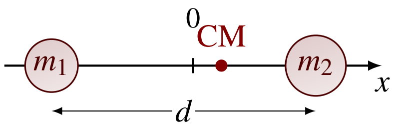
temos que

$$\vec{r}_2' = -\frac{m_1}{m_2}\vec{r}_1' \tag{19}$$

$$m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2' = 0 \tag{20}$$

O ponto divide o segmento na razão inverso das massas, estando sempre mais próximo da massa de maior massa.

Supondo $m_2 > m_1$, o CM fica representado pela figura a seguir:



Outros exemplos:

- Centro de massa da caneta bic: mais próximo da tampa.
- Centro de massa do sistema solar: aproximadamente o centro do Sol.
- Centro de massa da Via Láctea: aproximadamente no centro de Sgr A^*.

-Exemplo: CM de partículas separadas por uma distância d, uma com massa m e outra com massa $2m$:

$$R_x = \frac{m \cdot 0 + 2md}{3m} = \frac{2d}{3} \tag{21}$$

Portanto,

$$\vec{R} = \frac{2d}{3}\hat{\mathbf{i}} \tag{22}$$

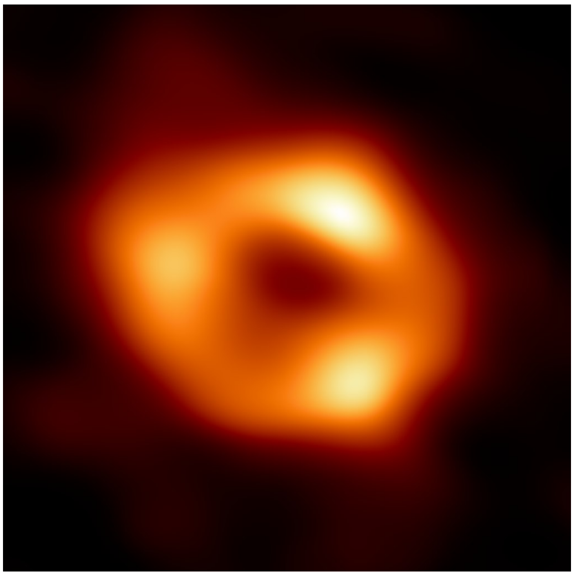


Figura 6.1: Sgr A^*: buraco negro supermassivo no centro da Via Láctea. Event Horizon Telescope, 2022.

6.2.2. Conservação do momento

Ainda na situação de duas partículas. Derivando 20

$$m_1 \frac{\mathrm{d}\vec{r}_1'}{\mathrm{d}t} + m_2 \frac{\mathrm{d}\vec{r}_2'}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{23}$$

$$m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = 0 \tag{24}$$

$$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0 \tag{25}$$

O momento total do sistema se concentra no movimento do CM.

6.3. Sistema de várias partículas

Agora com N partículas:

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_{1(2)} + \vec{F}_{1(3)} + ... + \vec{F}_1^{ext} \tag{26}$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_{2(1)} + \vec{F}_{2(3)} + ... + \vec{F}_2^{ext} \tag{27}$$

$$\vdots \tag{28}$$

$$\overline{\hspace{10cm}} \tag{29}$$

$$\sum_i^N m_i \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_i^N \sum_{j,j\neq i}^N \vec{F}_{i(j)} + \sum_i^N \vec{F}_i^{ext} \tag{30}$$

Os pares ação e reação se cancelam

$$\sum_i^N \sum_{j,j\neq i}^N \vec{F}_{i(j)} = 0$$

Assim,

$$\sum_{i}^{N} m_i \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i}^{N} \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}^{ext} \tag{31}$$

com $M = \sum_i m_i$.

A segunda lei fica escrita como:

$$M \cdot \frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}^{ext} \tag{32}$$

O vetor centro de massa é:

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + ... + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_N} \tag{33}$$

De forma análoga a 20,

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R} \tag{34}$$

$$\sum_i m_i(\vec{r}_i - \vec{R}) = \sum_i m_i\vec{r}_i' = 0 \tag{35}$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i m_i\vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i = \vec{P} = M\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} \tag{36}$$

Portanto,

$$\sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i'}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{p}_i' = 0 \tag{37}$$

O momento linear total do movimento interno do sistema (relativo ao CM) é nulo.

6.4. Discussão dos resultados

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}^{ext} \tag{38}$$

Quando $\vec{F}^{ext} = 0$, $\vec{P}$ é constante. Na ausência de forças externas → sistema isolado.

Portanto, no exemplo do astronauta com a ferramenta, o centro de massa permanece em repouso, se apenas forças internas atuam no sistema.

A conservação de momento, como a conservação de energia, é um dos princípios fundamentais da física, que se estende a situações muito mais gerais que as consideradas aqui. Ambos são válidos na mecânica quântica.

6.4.1. Movimento do centro de massa

Graças aos resultados anteriores, podemos tratar corpos macroscópicos como partículas, pois o movimento interno é independente do movimento do CM.

Se $\vec{F}^{ext} = 0$, o CM está em repouso ou em MRU com respeito a um referencial inercial, de forma que o referencial ligado ao centro de massa também é inercial.

6.4.2. Determinação do centro de massa

$$M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i \tag{39}$$

$$\vec{R} = \frac{\sum_i (\Delta m_i)\vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \tag{40}$$

quando $\Delta m_i \to 0$

$$\vec{R} = \frac{\int \vec{r}\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} \tag{41}$$

$$\vec{R}\mathrm{d}m = \int \vec{r}\mathrm{d}m \Rightarrow \int \vec{r}'\mathrm{d}m = 0 \tag{42}$$

que é a generalização de 20.

Se $\Delta V_i \to 0$

$$\lim_{\Delta V_i \to 0}\left(\frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}\right) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \rho(\vec{r}) \tag{43}$$

$\rho(\vec{r})$ é a densidade volumétrica. Analogamente, temos a densidade superficial:

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}A} \tag{44}$$

Densidade linear:

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\ell} \tag{45}$$

6.4.3. Elementos de simetria

Se uma distribuição homogênea (ρ =constante) de massa tem um centro de simetria, ele é também o CM da distribuição.

-Exemplo 1: Três partículas distribuídas a uma distância ℓ formando um triângulo equilátero. Todas com mesma massa m. O centro de massa é:

$$\vec{r}_1 = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} \tag{46}$$

$$\tag{47}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{\ell}{2}\hat{\mathbf{i}} + h\hat{\mathbf{j}} \tag{48}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{\ell}{2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{j}} \tag{49}$$

$$\vec{r}_3 = \ell\hat{\mathbf{i}} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} && (51) \\ &= \frac{m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2 + m\vec{r}_3}{3m} && (52) \\ &= \frac{0 + \ell\hat{\mathbf{i}} + \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{j}} + \ell\hat{\mathbf{i}}}{3} && (53) \\ &= \frac{\ell}{2}\hat{\mathbf{i}} + \ell\frac{\sqrt{3}}{6}\hat{\mathbf{j}} && (54) \end{aligned}$$

É o centro de simetria do sistema.

-Exemplo 2: Uma barra de densidade linear de comprimento L possui densidade linear $\lambda = ax$, $a = cte$. Qual a posição do centro de massa x_{CM} da barra?

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} \tag{55}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m \tag{56}$$

$$M = \int_0^L \lambda\mathrm{d}x = \int_0^L ax\mathrm{d}x = \frac{aL^2}{2} \tag{57}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\lambda\mathrm{d}x = \frac{1}{M}\int_0^L xax\mathrm{d}x = \frac{a}{M}\int_0^L x^2\mathrm{d}x \tag{58}$$

$$x_{CM} = \frac{a}{M}\left(\frac{L^3}{3}\right) = \frac{2L}{3} \tag{59}$$

Referências

[1] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de fisica básica: Mecânica (vol. 1)*. Vol. 394. Editora Blucher, 2013.

[2] Hugh D Young, A Lewis Ford e Roger A Freedman. *Fısica I Mecânica*. 2008.