Capítulo

8

Energia no movimento de rotação

Paula Ferreira: psfer@pos.if.ufrj.br

8.1. Energia cinética

Corpo rígido: sem deformação e com forma definida e imutável.

Considere um corpo constituído por um número grande de partículas. Cada partícula de massa $m_1, m_2, m_3, ...$ está a uma distância r_i do eixo de rotação. A energia cinética dessas partículas pode ser escrita como:

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2 \tag{1}$$

onde ω é a velocidade angular do corpo.

A energia cinética total será:

$$K = \frac{1}{2}m_1 r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_3 r_3^2\omega^2 + ... = \sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2 \tag{2}$$

$$K = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + ...)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 \tag{3}$$

Definimos o *momento de inércia* ou *inércia rotacional* do corpo:

$$I = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right) \tag{4}$$

[I]: $kg \cdot m^2$. Assim, a energia cinética de rotação de um corpo rígido é:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{5}$$

Quanto maior for I de um corpo, mais difícil será fazê-lo girar a partir do repouso e mais difícil será fazê-lo parar de girar quando estiver girando.

Portanto pela figura 8.1, vemos que é mais difícil girar o corpo pela borda do que pelo centro. **O momento de inércia depende do eixo de rotação**.

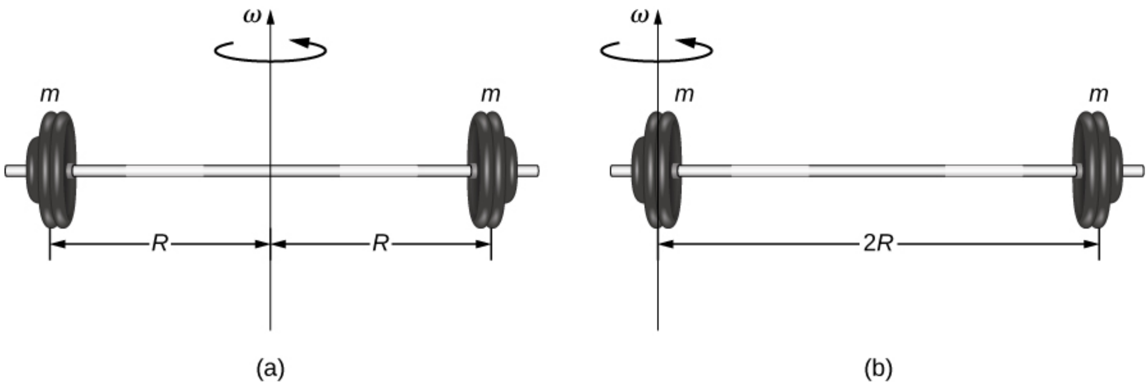
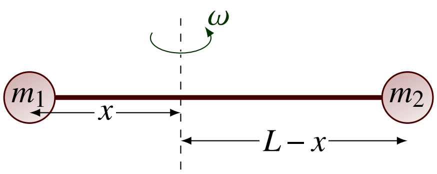


Figura 8.1

8.1.1. Exemplo

Sejam duas massas pontuais m_1 e m_2 presas por uma haste de massa desprezível e comprimento L. Calcule o momento de inércia do sistema em relação ao eixo z em que o momento de inércia será mínimo.



O momento de inércia é

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = m_1 x^2 + m_2 (L-x)^2 \tag{6}$$

O mínimo é dado por:

$$\left.\frac{\mathrm{d}I_z}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = 0 \tag{7}$$

$$2m_1 x_0 + 2m_2(L-x_0)(-1) = 0 \tag{8}$$

$$(m_1+m_2)x_0 = m_2 L \tag{9}$$

$$x_0 = \frac{m_2}{m_1+m_2}L = \frac{m_2 L + 0 m_1}{m_1+m_2} \tag{10}$$

x_0 é a posição do centro de massa do sistema. Portanto, o momento de inércia mínimo é o momento de inércia do centro de massa.

O momento do centro de massa é:

$$I_{CM} = m_2(L - x_0^2) + m_1 x_0^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}L^2 \tag{11}$$

8.1.2. Exemplo 9.8 Y & F.

Um cabo leve, flexível e não deformável é enrolado várias vezes em torno da periferia de um tambor, um cilindro maciço de diâmetro d e massa m, que pode girar em torno de um eixo estacionário-horizontal. A extremidade livre do cabo é puxada com uma força constante f, deslocando-se a uma distância $10d$. Ele se desenrola sem deslizar e faz o cilindro girar. Se o cilindro está inicialmente em repouso, calcule sua velocidade angular e a velocidade escalar final do cabo.

A força que faz o cabo desenrolar e o cilindro girar é a força de atrito estático, já que o cabo não desliza.

$$I_{cilindro} = mr^2 = m\frac{d^2}{4} \tag{12}$$

Como a força não é conservativa, o trabalho realizado sobre o cilindro é:

$$W = \Delta E \tag{13}$$

$$W_f = \cancel{\Delta U} + \Delta K = K - 0 \tag{14}$$

$$W_f = f10d \tag{15}$$

$$f10d = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{16}$$

$$f10d = \frac{1}{2}m\frac{d^2}{4}\omega^2 \tag{17}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{f80}{md}} \tag{18}$$

Como $v = \omega r$:

$$v = \omega\frac{d}{2} = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{f80}{dm}} \tag{19}$$

8.2. Energia potencial gravitacional

Considere um corpo rígido com massa constituída por um conjunto de massas m_i distribuídas em posições y_i com relação ao zero da energia potencial gravitacional:

$$U = m_1gy_1 + m_2gy_2 + ... = (m_1y_1 + m_2y_2 + ...)g \tag{20}$$

$$U = (m_1 + m_2 + ...)y_{CM}g \tag{21}$$

Para um corpo de massa total M, a energia potencial gravitacional U é

$$U = Mgy_{CM} \tag{22}$$

onde y_{CM} é a coordenada y do centro de massa.

Referências

[1] Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de fisica básica: Mecânica (vol. 1)*. Vol. 394. Editora Blucher, 2013.

[2] Hugh D Young, A Lewis Ford e Roger A Freedman. *Física I Mecânica.* 2008.